Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 1
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

---

1. Man finde eine reelle Zahl $c > 0$, für die folgendes gilt: Jeder Graph G mit n Ecken und $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$ Kanten enthält mindestens cn Dreiecke.

2. Es sei F der Graph auf 5 Ecken mit 6 Kanten, der zwei kantendisjunkte Dreiecke enthält. Man beweise, dass
$$\mathrm{ex}(n, F) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$$
für alle $n \geqslant 5$ gilt.

3. Es sei $n \geqslant 3$. Für $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sei e_{ij} eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$. Es gelte
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} e_{ij} > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor .$$
Man beweise, dass es drei Indizes $i < j < k$ mit den Eigenschaften
$$e_{ij} + e_{ik} > 1 , \qquad e_{ij} + e_{jk} > 1 \qquad \text{und} \qquad e_{ik} + e_{jk} > 1$$
gibt. Impliziert dies den Spezialfall $r = 3$ des Satzes von Turán? Gibt es eine analoge Aussage für $r > 3$?

4. Es seien $r \geqslant 2$ eine ganze und $\gamma > \frac{r-2}{2(r-1)}$ eine reelle Zahl. Man beweise, dass die Anzahl der Cliquen der Ordnung r in einem Graphen mit n Ecken und mindestens γn^2 Kanten mindestens
$$\frac{2\gamma(4\gamma - 1) \cdot \ldots \cdot \big(2(r-1)\gamma - (r-2)\big)}{r!} \cdot n^r$$
beträgt.

- Abgabe von Aufgabe 3 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 24. Oktober vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 1, 2, 4 bis Freitag den 25. Oktober, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 25. Oktober, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

1. Ist leichter als es aussieht.
2. Wie könnte ein extremaler Graph aussehen? In der anderen Richtung hilft Induktion nach n. Dabei kann sich der Fall $n = 7$ als aufwändig erweisen.
3. $n - 2 \longrightarrow n$.
4. Induktion nach r, wobei der Induktionsschritt wie im Beispiel $r = 3$ verläuft, das in der Vorlesung behandelt wurde.